Repetition från igår

$$A\bar{x} = \bar{b}$$

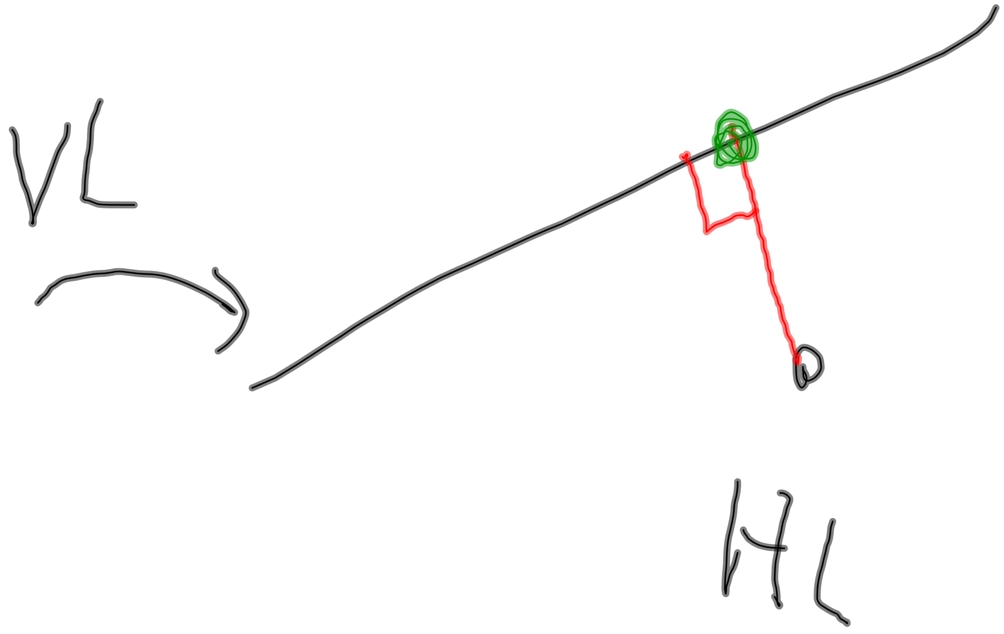
överbestämt

(inkonsistent)

Vi vill ha "bästa" svar med tanke

nov 17-08:02

på att det inte finns någon lösning.



nov 17-08:02

Vi kunde formulera villkoret som att skillnaden

$$A\bar{x}-\bar{b}$$

är ortogonal mot alla kolonner i A.

nov 17-08:02

Att ta skalärprodukt med kolonnerna i A är <u>samma</u> sak som att mult. med A^t från vänster

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = \bar{u}^t \bar{v}$$

nov 17-08:02

Vi fick normal-ekvationen

$$A^t A\bar{x} = A^t \bar{b}$$

nov 17-08:02

I sista exemplet hade vi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 1 \\ 0 & 1/8 & 1 \end{pmatrix}, \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/3 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

(I det här fallet fanns lösning

$$\begin{pmatrix} 1/6 \\ 2/3 \\ 1/6 \end{pmatrix}$$

)

nov 17-08:02

Om vi hade fortsatt med fler ekvationer

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ 0 & 1/2 & & 1 \\ 0 & 1/4 & & 1 \\ \vdots & & & \\ 0 & 1/2^{n-1} & & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/3 \\ \vdots \\ 1/n \end{pmatrix}$$

nov 17-08:02

Ta både A och $\bar{b}$ till datorn (matlab) och beräkna

$$C = A^t A$$

$$d = A^t \bar{b}$$

nov 17-08:02

I matlab skriver vi

$C = A' * A$

$d = A' * b$

Sedan ska vi lösa ekvationssyst.

$C\bar{x} = d$

nov 17-08:14

I matlab skriver vi

$$x = C\hat{}(-1)*d$$

eller

$$x = C \backslash d$$

backslash

nov 17-08:15

Det går ofta
att få transponat
genom
transpose(A)

nov 17-08:17

Den formel vi kom

fram till

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \frac{1}{6}\left(f(0)+4f(0{,}5)+f(1)\right)$$

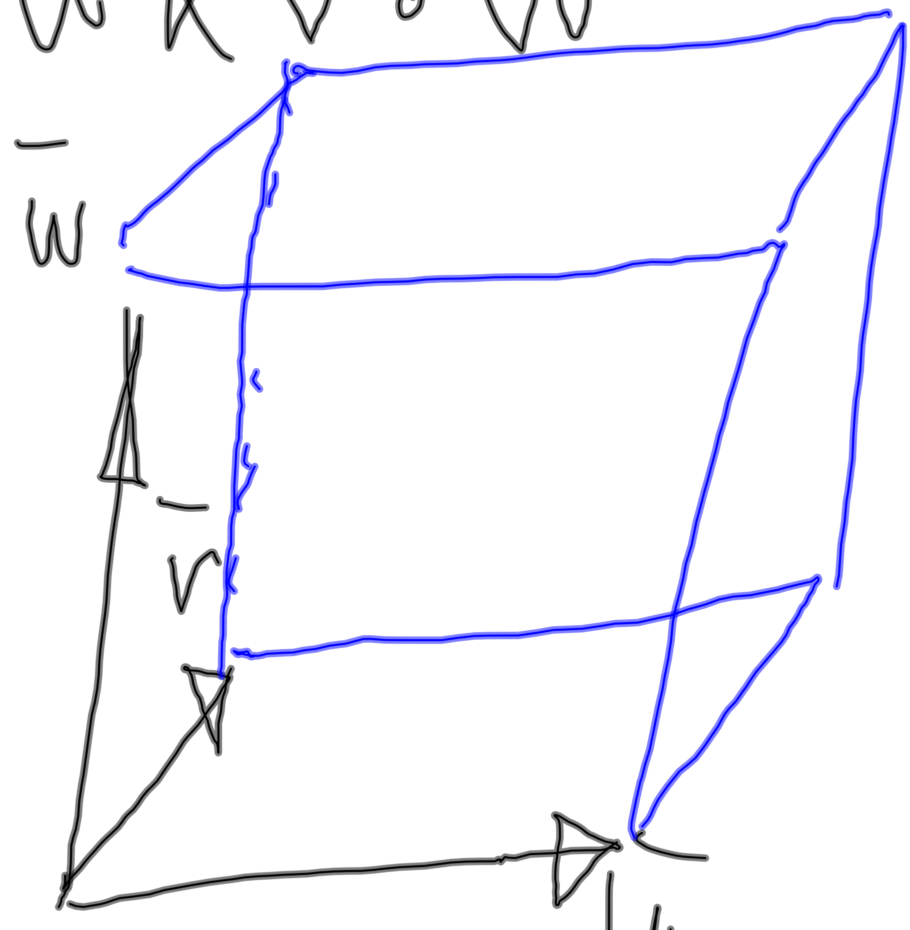
är bättre än

trapetsmetoden.

nov 17-08:19

Trippelprodukt

$\bar{u} \times \bar{v} \circ \bar{w}$



Volymen är $|\bar{u} \times \bar{v} \circ \bar{w}|$

nov 17-08:21

Tecknet +

om högerorienterat

och tecknet −

om vänsterorienterat

nov 17-08:23

Om vi fixerar $\bar{u}$ och $\bar{v}$ och varierar $\bar{w}$ så kommer

$$\bar{u} \times \bar{v} \cdot \bar{w}$$

att vara linjär i $\bar{w}$

nov 17-08:24

dvs respektive

- addition
- mult. med skalär

$\bar{u} \times \bar{v} \cdot (\bar{w}_1 + \bar{w}_2)$

$= \bar{u} \times \bar{v} \cdot \bar{w}_1 + \bar{u} \times \bar{v} \cdot \bar{w}_2$

$\bar{u} \times \bar{v} \cdot (a\bar{w}) =$

$= a\, \bar{u} \times \bar{v} \cdot \bar{w}$

nov 17-08:24

och det gäller motsvarande för $\bar{u}$ om $\underline{i}$ fixerar $\bar{v}$ och $\bar{w}$ och för $\bar{v}$ om $\underline{i}$ fixerar $\bar{u}$ och $\bar{w}$

nov 17-08:26

Vi kallar det för att trippel-produkten är multilinjär dvs linjär i varje argument

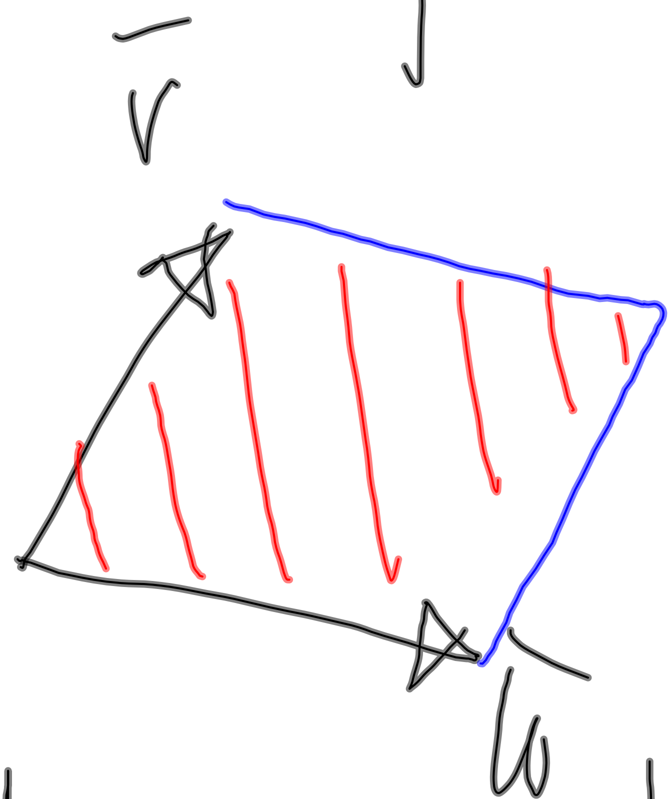
nov 17-08:29

när vi fixerar
alla andra
argument.

nov 17-08:30

Gå till planet $\mathbb{R}^2$

och se på area



(den ges av längden av $\bar{u} \times \bar{v}$ om vi lägger

nov 17-08:30

in $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$

genom att införa en

till axel.

$\bar{u} = (a, b)^t$

$\bar{v} = (c, d)^t$

Inför en z-koordinat

om se $\bar{u}$ om $\bar{v}$ som

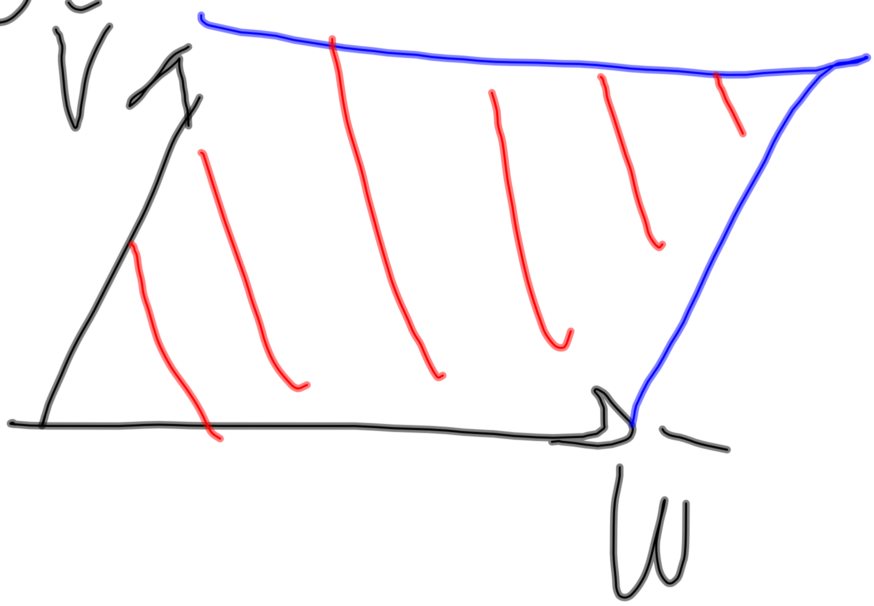
nov 17-08:33

$$\bar{u} = (a, b, 0)$$
$$\bar{v} = (c, d, 0)$$

$$\bar{u} \times \bar{v} = (b \cdot 0 - 0 \cdot d, \; 0 \cdot c - a \cdot 0, \; a \cdot d - bc)$$
$$= (0, 0, ad - bc)$$

nov 17-08:34

Beloppet av
ad - bc ska
ge arean av



nov 17-08:35

Detta blir också multilinjärt

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \longrightarrow ad-bc$$

nov 17-08:37

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

ger

$$x_1 y_2 - y_1 x_2$$

nov 17-08:38

Om vi vill att
ekvationssystem
alltid ska ha
en unik lösning
är trippelprod.
användbar.

nov 17-08:42

Samme för 2x2

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

När går detta alltid att lösa för alla högerled $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$?

nov 17-08:43

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$x\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

detta kan bli $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$

för alla $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$

nov 17-08:44

precis när $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ inte ligger på linje, dvs om arean de spänner upp inte är noll.

nov 17-08:45

Arean (med tecken)

ges av

$ad - bc$

nov 17-08:46

Det går att lösa

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

unikt för alla $(e, f)^t$ precis om

$$ad - bc \neq 0$$

nov 17-09:03

Om $ad-bc=0$
går det bara att
lösa om $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ också
har samma riktning
som $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$

nov 17-09:04

På samma sätt för 3x3-matris A får vi unik lösning för alla högerled precis om

$\bar{u} \times \bar{v} \cdot \bar{w} \neq 0$

nov 17-09:05

Om $\bar{u} \times \bar{v} \cdot \bar{w} = 0$

så finns lösning

bara om $\bar{b}$ också

ligger i samma plan

som $\bar{u}, \bar{v}$ och $\bar{w}$.

nov 17-09:06

$$x_1\bar{u} + x_2\bar{v} + x_3\bar{w} = \bar{0} \,?$$

$$A\bar{x} = \bar{0} \,?$$

Om $\bar{u} \times \bar{v} \cdot \bar{w} \neq 0$ finns

en unik lösning som $\Rightarrow$

måste vara $\bar{x} = \bar{0}$

nov 17-09:10

Vill göra samma sak för flera koordinater, dvs för n vektorer i $\mathbb{R}^n$

Vi kan ställa upp vektorerna i en

nov 17-09:12

matris

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \bar{u}_1 & \bar{u}_2 & \ldots & \bar{u}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

nov 17-09:13

Vill kunna se
när det finns
unik lösning till

$$A\bar{x} = \bar{b}$$

för alla högerled $\bar{b}$

nov 17-09:14

Först ger vi den ett namn:

determinant

nov 17-09:15

Förutom att det är multilinjär och alternerande behöver vi bestämma

$$\det(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n) = \det(I) = 1$$

nov 17-09:19

Använd räkneregl. för fallet $n=2$.

$$\det\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \det(a\bar{e}_1 + b\bar{e}_2, c\bar{e}_1 + d\bar{e}_2)$$

$$= a\det(\bar{e}_1, c\bar{e}_1 + d\bar{e}_2)$$

$$+ b\det(\bar{e}_2, c\bar{e}_1 + d\bar{e}_2)$$

nov 17-09:24

$$= ac\det(\bar{e}_1, \bar{e}_1)$$
$$+ ad\det(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$$
$$+ bc\det(\bar{e}_2, \bar{e}_1)$$
$$+ bd\det(\bar{e}_2, \bar{e}_2)$$
$$= ac \cdot 0 + ad \cdot 1$$
$$+ bc \cdot (-1) + bd \cdot 0$$
$$= ad - bc$$

nov 17-09:26

Vi kan göra samma sak i allmänhet

$$\bar{u}_1 = a_{11}\bar{e}_1 + a_{21}\bar{e}_2 + \dots + a_{n1}\bar{e}_n$$

$$\bar{u}_2 = a_{12}\bar{e}_1 + a_{22}\bar{e}_2 + \dots + a_{n2}\bar{e}_n$$

$$\vdots$$

$$\bar{u}_n = a_{1n}\bar{e}_1 + a_{2n}\bar{e}_2 + \dots + a_{nn}\bar{e}_n$$

nov 17-09:30

Vi får

$\det(\bar{e}_{i_1}, \bar{e}_{i_2}, \ldots, \bar{e}_{i_n})$

Detta blir noll om

vi har en upprepning

(byt om kolla att

det måste vara noll)

nov 17-09:34

Vi kommer få +
när de står i
"rätt" ordning.
Med fyra kolonner
finns 24 olika
ordningar:

nov 17-09:37

1234
1243
1324
1342
1423
1432
2134
2143
2314
2341
2413
2431

3124
3142
3214
3241
3412
3421
4123
4132
4213
4231
4312
4321

nov 17-09:37

4123 −1

1423 −1

1243 −1

1234

De som har +

är de som kan

sorteras till

1234 med ett

jämnt antal steg.

nov 17-09:40

3 2 4 1 (-1)

1 2 4 3 (-1)

1 2 3 4

nov 17-09:42

Formeln ger en
summa av produkter
(med tecken)
av alla sätt att
ta ett element i
varje rad och ett
ur varje kolumn.

nov 17-09:45

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} * & & \\ & * & \\ & & * \end{pmatrix}\begin{pmatrix} * & & \\ & & * \\ & * & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} & * & \\ * & & \\ & & * \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & * \\ * & & \\ & * & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} & & * \\ & * & \\ * & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & * & \\ & & * \\ * & & \end{pmatrix}$$

nov 17-09:45